Title	カントルの集合論の哲学的側面 : 故下村寅太郎先生を偲んで : (数学史の研究)
Author(s)	村田, 全
Citation	数理解析研究所講究録 (1997), 1019: 1-22
Issue Date	1997-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/61658
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1019巻 1997年 1-22

カントルの集合論の哲学的側面

ー故下村寅太郎先生を偲んでー

村田　全　（京大数理研；12/V/1997）
（加筆修整；VII/1997）

Georg Cantor (1845-1918)の集合論の形成過程は数学関係の論文だけでも跡付けられるが，その底深く隠されて動機や目標を更に深く知るには彼の哲学的業績についての知識が役立つ．彼は集合論を一元論と多元論，観念論と経験論を止揚する哲学として構想し多くの文献を渉猟したが，記述は体系的でなく内容も折衷的構想の段階に止まっていて，実際には Platon, Leibniz, Spinoza の線上にある．しかしそれが直接に集合論を生んだわけではなく，その影響が表面に出るのは集合論が一段落する以後であり，彼の素描した自然哲学は幻想的なものである．ただ彼の哲学的関心は初期から晩年まで一貫しており，それが数学の展開と絡んで現れる様子は彼独特である．

私は Cantor の集合論とその哲学について，このような関心の下で，

（1）超限順序数の形成の再検討　(cf. 下の節 **(3-2-1)**),
（2）Cantor の議論の論点先取的性格　(cf. **(3-2-2)**)
（3）「数学の本質は自由性にあり」の本来の意味　(cf. **(3-2-3)**)
（4）連続，時間，空間の議論　(cf. **(3-2-4)**)
（5）彼の自然哲学の企画　(cf. **(4-1)**)

の五点についてまとめた．これは近刊の拙著「数学と哲学の境界面」([1]として引用）所収の「カントルの集合論と自然哲学」の補足である．

(1) 初期の論文には後の仕事につながる哲学的傾向が見られる．

Dissertation (1867, 二次不定方程式), **Habilitationsschrift** (1970, 三元二次形式の変換）には当時の慣例に従って，それぞれ三つの口頭試問用の論題が添えられている．彼の場合，それらは論文の主題と無縁の哲学的テーマだが，次の三つのテーゼはこの考察で特に重要である．

Dis-2. 空間，時間の実在性が絶対的か否かは，この論争の性質そのもののために，判定できない．

Hab-2. Spinoza は，万物における真の規範，規則が人間に発見されうるための力を数学に帰しているが("Ethica" 第1部，命題36 付録)，それは正しい．

Hab-3. 諸整数を，また同様の仕方で諸天体を，或る規定と関係で構成された何らかの全体にまとめること．

これらは全て以下の議論に関連する．特に **Hab-3** は Pythagoras 的主張だが，直接には「自然の秩序 即 数学的秩序」という Spinoza の思想の影響が強い．

(2) 集合論の発端の論文に哲学色は薄い．

「三角級数論の一定理の拡張」(1872)（以下「拡張」と略）は三角級数の一意性に関する純数学的論文で，n 次導集合の概念と有理数の基本列に基づく無理数論とが，その道具立てとして現れている．

「代数的実数の一性質」(1874)（以下「性質」）は本来的には超越数に関する数論の論文で「拡張」とは全く別のテーマである．ただ実数の非可算性を示したところに集合論的論法の初出としての意味がある．尤もまだ対角線論法は現れず，無理数の性質(区間縮小法)が用いられている．

「集合論への一寄与」(1878)（以下「寄与」）は，上の二つに現れた全体概念を集合(Mannigfaltigkeit)として綜合し一般的理論建設の意図を示したもので，濃度の概念(Machtigkeit)を導入し，線分と n次元空間との一対一対応，即ち両者の同一濃度を示している．これは次元の問題の最初の数学的に定式化である．またこの二つの濃度の間に第２，第３，．．の濃度があるかという形で，連続体問題の最初の形がここに出現する．

この論文には Riemann と Dedekind の影響が見られるが，以上の三編を通じてまだ哲学的意図は現れていない．

(3) 彼の哲学は「無限線状点集合 第5部」(1883) で顕著になる．

この論文 **"Uber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten Nr.1-Nr.6"** (1879-84; 「無限線状」と略)は '連続とは何か' の解明を目標とする一連の論文で，彼における数学と哲学の繋がりはここにおいて明瞭になる．「無限線状点集合 (lineare Punktmannigfaltigkeit または lineare Punktmenge)」とは，幾何学的ないし数論的な点の集合で直線またはその部分線分と一対一に対応するものを言う．　第５部(抽象的集合論の建設)では哲学的傾向が前面に出，第６部で連続体問題に一歩前進が見られるが，そこで擱筆される．

(3-1) 超限集合論の出現まで(第1-4部)

(3-1-1) 第1部(1879)では '連続' を分析するのに，導集合による点集合の分類を利用しようという方針が宣言される．これには「拡張」と，それに発するイタリアでの Dini や Ascoli の仕事が刺激になったと見られる．

(3-1-2) 第2部(1880)では導集合 $P^{(n)}$ の次数の**記号**が有限値を超えて延長され，第２級順序数の原型となる．彼は例として

$$w^{w}n,\ w^{w+1},\ w^{w+n},\ w^{wn},\ w^{w^{n}},\ w^{w^{w}},\ \ldots$$

$w \longrightarrow \omega$
各区

を挙げ，この列を

「どこまでも続けられる弁証法的概念生成(eine dialektische Begriffs-erzeugung)で，何らの任意性なく自らの中で必然的かつ矛盾なく進行する」

ものとする．「弁証法的概念生成」とした理由の説明はないが，高次導集合の無限列が和集合と共通部分という相反する演算によって’必然的’に進行するという意味での Hegel 的なものであろう．ここまでの成果は哲学から導かれたものとは言えないが，その狙いは常に’連続とその哲学’であり，Spinoza 哲学の自己流の解釈の道もこの辺から開けつつあったのであろう．

(3-1-3) 第3部(1882)では関数論への応用を念頭に置いて，'無限線状点集合'をn次元空間の点集合に拡大するが，’連続’の問題を巡って抽象的集合論確立の意識がはっきりしてくる．次に引用する意見は重要である．

「濃度は集合に本来的に付属する Moment で，点集合ばかりか，’定義明快(wohldefinit)'な如何なる抽象的集合にも適用される．」

この 'Moment' はヘーゲル的な内在的契機の意味と思うが，それならば濃度は集合の無限生成の過程に内在する必然的要因となり，上の'弁証法的’の意味とも符合する．しかし第２部の次数はまだ唯の「記号」で「数」ではない．

また 'wohldefinit'な集合とは，集合への元の所属がその定義から「排中律によって内在的に」決定されることを指す．これは論理的判断に超経験性を認める立場だが，この用語は後に Zermelo が公理的集合論で更に明確化される．

これに続く次のコメントは一段と面白い．

「この意味での集合論は，数学だけに注目して他の概念領域はしばらく度外視しても，数論，関数論，幾何学等を包括する．集合論はこれらを濃度の概念に基づいて一段と高い統一体へと取りまとめ，不連続者も連　続者もこの同一の見地から考察されて共通の測度(Maß) をもって測られる.」

この'共通の測度'は濃度のことだが，Riemannが『幾何学の基礎をなす仮説』(1854)において，数え上げ(Zahlung)による離散的多者(discrete Größe; discrete Mannigfaltigkeiten; 複数))と，測定(Messen)による連続的多者 (stetige Mannigfaltigkeit)とを区別したのに対するカントルの反響であろう．即ち彼は図形を点集合と見，離散的多者を無限集合 (unendliche Mannigfaltigkeit)に拡大し，リーマンの二種の「量」を「濃度」によって統一しようとしたと見られる．彼は第４部で容積(Inhalt; 測度）を持ち出すが，これは「共通の測度」としての濃度に限界を感じたためだったかもしれない．

この「共通の測度の存在」に対しては後に Rene Baire (1874-1932) が疑問を投げたが(1905)，これは集合論に対する最も根底的な批判（非原子論的全体像）である．この件は［1］を参照されたい．

彼は更にn次元連続空間の可算分解の考えから経験的空間の連続性の「物理的ないし自然哲学的意味」を探ろうとし，高次元連続空間 A から，A で到る処稠密な可算集合 M（例えば有理点の全体)を除いた集合 A^* においても連続的運動が可能なこと(弧状連結)を注意する．これは **Dis-2** の線でのことで，この仕事の原動力ではないにせよ，それが底流していたのは確かであろう．彼は言う．

「現実の世界を「連続」な三次元空間とするのは，そこに生起する種々の形，特に運動を配慮して立てられた仮説である．それは '人間の思考の産物たる三次元の数論的連続体（実は実数の三重対）と経験界の底にある空間概念との間には，完全な一対一対応がつく' という任意性のある仮説であり，この仮説に内在的な強制力はない．例えば A^* を見よ．従って運動の '連続性' の説明に空間の連続性を持出すわけには行かない．むしろこのような考慮の下での力学の研究があってよい....」

Cantor は点集合論の背後にこうした哲学的構想を懐いていた．尤もここにはまだ Spinoza や Leibniz などとの繋がりはなさそうで，それは後の「諸定理(II)」(1885; cf. **4-1**)の自然哲学で初めて，神学的考慮をも取り込んだ極端な形で現れる．実は Dedekind も『連続と無理数』(1872)で切断によって連続を定義した後，同様の意見を述べるが(同書 §3) ニュアンスは多少違っていて，そこでは数学的存在を人間の創造物とする現代性が顕著である．

(3-1-4) 第4部(1883夏)に哲学的考慮はないが，連続体濃度の集合 P の導集合 P' を，高々可算個の孤立集合とそれ以外の部分とに

$$(*)\quad \begin{cases} P' = (P'-P'')+(P''-P^{(3)})+\ \dots\ +(P^{(n-1)}-P^{(n)})+\ P^{(n)} \\ P' = (P'-P'')+(P''-P^{(3)})+\ \dots\ +(P^{(n-1)}-P^{(n)})+\ \dots\ +\ P^{(w)} \end{cases}$$

と点集合を分解する試みで，第6部ではこの分解が超限的に延長されて連続体問題を攻めるのに利用される他，1885 の自然哲学でも 或る役割を果たす．

別に，濃度と並んで点集合の容積(Grosse，今日の測度)が現れる．疎な完全集合(三進集合)の発見を促したのはこれであろう．第4部が1883年春に書かれたのに対し，三進集合は同年秋に発表された第5部の注釈の中に現れる．

容積の導入は Cantor の連続論において重大な意義を持つ．実際，疎な完全集合の濃度は非可算だが容積は0であり（第6部），個数の拡張たる濃度という「共通の測度」だけでは，測定の拡張たる容積が処理しにくいことを示し，後の「測度問題」のような問題(現代的な Zenon の逆理!)を提起したからである．Cantor は Zenon の逆理には触れなかったが，当時，数学史家 P. Tannery（数学者 J. Tannery はその兄で Borel，Baire 達の先生）など，一部の数学者，哲学者は集合論は Zenon の逆理を解決したと即断している．

(3-2) 超限集合論の出現（第5部 $$1-14）

第5部(1883 秋)は第４部発表の約二ケ月後，短期間に書かれたらしい．体系的記述でなく哲学的にも問題は多いが，彼の哲学の最も基本的な文献である．

(3-2-1) 超限順序数の出現（$$1-4）

$1 では普通の実在的な整数概念を超えて無限に拡大しようとし，彼は "これなしに集合論は一歩も進めない" と言う．それが '実在的(real)無限整数' で，解析学における変数の無限大，無限小のような**非本来的無限 (Uneigentlich-Unendliches)**でなく，射影幾何学や関数論の無限遠点のような存在する無限，**本来的無限(Eigentlich-Unendliches)**であり，しかも一系の数として，有限整数とも無限整数の相互間でも数論的関係をもつものとされる．

なお空集合は実在的集合でなく，０も実在的整数とされない．'real' は '実在的' と解したが，'実体的(substantiell)' とする方がよいような場合もある．何れにせよ実数(reelle Zahl)とは別者である．

次の原註がある．

「集合論は数学に属したが，実は新しい '一と多の哲学' である．即ち集合とはそれぞれ一者(Eines)と考えうる多者（jedes Viel)，一つの法則によって一個の全体（Ganze）に結びつけられる或る定まった元の全体であり，自分はこれによって Platon の eidos [ママ] や idea に近い或るもの，あるいは対話篇 "Philebos" における 'mikton' [ママ] と似たものを定義しえたと信ずる」

['mikton' は '~~to~~ apeiron（無限界）', 'peras（限界）' の双方の '混合者' で，(「ピレボス」23D, 25B, D)，一と多の綜合のつもりであろうが，Platon の用語はこれと異っている．]

$2 では整列集合の概念が定義され，超限順序数はその順序型と定義され，有限整数は数クラス(1)，可算順序数は数クラス(2)，数クラス(3)，,..と，濃度によって組分けされる［今日の第１級，第２級，...］．このクラスが記号ないし順序数の集合として超限基数となるわけだが，その存在保証はまだない．

$3 には超限順序数の加法と乗法が定義されると共に，その存在保証に繋がる整列可能定理について「定義明快な各集合が常に整列集合の形に直せることは最も基本的で普遍妥当的な思考法則(Denkgesetz)であり，証明は後に示す」と書かれたが，彼はそれを果たすことなく終わっている．

(3-2-2) 超限順序数論の形成と問題点

ここでは現代的角度からの考察もいくらか交える．

$$1-3 において実体的無限整数 a は，単位の付加と無限列の単位化の二つの 'Erzeugungsprinzip(生成原理)' と第三の 'Hemmungs- oder Beschrankungs-prinzip（停留・仕切の原理)' によって規定される．初めの二つは先の Nr.2

で’弁証法的生成’と呼ばれたものの自覚的な表現で，導集合列の次数である無限記号の実体化，実は整列集合の順序型だが，第三原理の事情はかなり微妙である．私はこの原理を，「カントル 超限集合論」（功刀，村田訳，共立出版）の「付録」で’制限または仕切原理’と訳し一応の解説をしたが，今回，訳を上のように改めると共に解説も補正した．些末なことのようだが，Cantor の主張により近づき，現代的意味もありそうに思えたためである．この原理の説明は $11 にあるが，原文はかなり分かりにくい．次はその大要である．

「[任意の数 α に] 先行する数の全体が，その全範囲として定義済みの或るクラスの濃度をもつ限り，初め二つの生成原理によって新しい数の創造をどこまでも推進することを要求する」（「論集」p. 197）

原文には [] の部分がないが，これがなかなか微妙なのである．α が有限整数の場合は，有限の間はどこまでも続けよというだけのことだが，可算順序数になると，各 α に先行する数全体の濃度は可算だから，それぞれに先行する数の全体が可算濃度である限り，二つの生成原理のどれかを用いて生成を行えと要求され，この無窮列が’生成’されると後は第二原理の出番で，それが第 3 級順序数の始数 $\boxed{\mathrm{W}}$ だという筋書きである．しかし $\boxed{\mathrm{W}}$ の先の延長はもとより第三原理を抜きにして $\boxed{\mathrm{W}}$ 自身の存在保証はどうなるのか，これは問題である． $\boxed{\mathrm{W}} \to \Omega$

実は，$$1-3 での第三原理の役割は，二つの生成原理で得られた無窮の超限数列の要所要所に濃度が飛躍する位置の目印を付けることによって濃度を超限順序数の中に超限基数として填め込み，これを個数(Anzahl)と確認することであって生成の役目は与えられていないように見える．ところが $$11-13 になると少し様子が変わってきて，$\boxed{\mathrm{W}}$ に続く無数の始数の存在について第三原理も本質的な’生成原理’になっているのでないかとの疑いが生ずる．尤も Cantor は第一，第二の原理だけで超限数の生成は完了したと考えたらしく，$$11-13 でもそのようなことは言っていない．

この事情を説明するには’数学的対象’の存在性にまで戻って考えてみる必要がある．以下の一連の議論はこの件に関連する．なお [1] も参照されたい．

先ず，有限整数(第 1 級順序数)と w に始まる個々の第 2 級順序数までの存在性はよいとして，$\boxed{\mathrm{W}}$ の存在性もそれと同じ程度かと考えると，そこにはニュアンスがあり，状況は必ずしも同じではない．$\boxed{\mathrm{W}}$ を知らないで進められる無窮列の先は五里霧中と言ってよく，$\boxed{\mathrm{W}}$ に到る無窮列全体像は見えてこない．終わらないから第二原理で突き進むのだと Cantor は言うかのもしれないが，その像はあまりに不鮮明で，彼自身もその様相の解明には手を着けていない．これも一つの抽象として許せるものであろうか． w → ω

もしそれでもこれを許すとすれば，連続体濃度は非可算だから超限数列を延

ばす内にそこに到達すると考えることであろう．しかしそれ以上の延長を支える根拠はこの時点ではまだ明示されていない．X のベキ集合 $X=2^{x}$ の濃度が X の濃度を超え，2^{x} の濃度は X を超える，... というのは，対角線論法が出た論文("Über eine elemen@tare Frage der Mannigfaltigkeitslehre", 1890/91) で初めて言明されることである．それでは彼の第３級，第４級，...の順序数は全て連続体濃度以下の範囲で考えられていたのであろうか．

これが必ずしもそうでもないと推測できるのは，彼が $$11-13 で濃度上昇の別の証明を与えており，それを1890/91年の論文で '対角線論法はその証明の別証明' と呼んでいることによる．しかしそれら二種の証明は濃度上昇の手段として異質なものであることがやがて分かり，連続体問題の震源地の一つになるわけである．

その証明は超限順序数列の構造の考察から得られる．しばらく順序数形成以前に身をおき空集合を**記号０**として記入すると，０は**数０**を象徴すると共に，記号０を元とする**集合 {0}** が出現する．この集合を０の次に記入して**記号１**と書くと，１は一つの元０だけから成る集合として**数１**の基本例となり，同時に**集合 {0.1}** (= {0,{0}}) を得る．これを**記号２**で示すと，２は**数２**の基本例であると共に，集合 {0,1,2} (= {0,{0},{0,{0}}}) を示す**記号３**がつくられる．..要するに**記号 n** は集合 {0,1,.., n-1} のことで，それは数として n-1 の直後の**数 n** にもなる．全て有限整数はこうして得られる．

ここで，全ての有限数の無窮列 {0,1,.., n,..} が得られたと信ずるならば，それは第三の '停留' 原理によると思われるが，これを**記号** w で書くと，w は有限整数の直後の**数**として，もはや有限ではあり得ず，最初の超限順序数となることは容易に示される．こうしてえ**(3-1-2)**で例示した一連の記号の各々は，それ未満の可算順序数全体からなる集合として可算濃度の集合になる．

ところが有限個の有限数だけでは有限の範囲が超えられないように，可算順序数の可算列の上限は常に可算の範囲に止まることが証明されるので($13)，もし全ての可算順序数の無窮列 $\boxed{W}=\{0,1,..,w,w+1,..,w^{w},..,\overset{\alpha}{a},..,\overset{\beta}{b},...\}$ が得られたと信ずるならば，この $\boxed{W}$ は上と同様の論法で，もはや可算ではありえず，第３級順序数の始数としてその次の濃度を示すものとなる．

$\boxed{W} \to \omega$
w → ω

そこで $\boxed{W}$ の存在性も一応認めることにしよう．しかし $\boxed{W}$ の次の跳躍点 z の存在性はどの程度に確かであろうか．もしその跳躍を確かめようとすれば，$\boxed{W}$ 以降の第３級順序数が第３級の濃度の範囲で並んだ列の上限は常に第３級であることの証明がいる．しかしそれは彼にとっても至難の業であったのか，彼もそこには踏み込まなかった．むしろそれは $\boxed{W}$ の存在性が有限整数や w の場合と同列には行かないことを意味しよう．私はどんな数学的存在も目に見えねば

z → Z
ゼータ大

ならぬと言うのではないが，全ての第2級順序数 $\overset{\alpha}{\cancel{a}}$ の列の後ろに W を置いたものは余りに想像しがたい．実際，$\overset{\alpha}{\cancel{a}}$ を如何に可算的に跳び石づたいに辿っても W には到達しないのに，その種の第3級の数を第3級の濃度だけ並べてその上限を取り，それがやはり第3級順序数であるという定理はどう考えればよいのか．少なくとも私はこれで濃度上昇の様子が分かったという気になれず，私の非力のせいかもしれないが，W を具体的に目に見るのは人間には不可能と思っている．

なお，ボレルは，第2級順序数の '全体' など考えられない（超限の二律背反）と強く主張しているが，これについては［1］を参照されたい．

これを救う一つの道として，'停留-仕切の原理' をも生成原理に加え，濃度が'停留'状態になったら第三原理でその無限列の存在を承認して'仕切'を付け，ここで第二生成原理を適用する，あるいはこれが Cantor の真意だったかもしれない．私が前に '停留-仕切の原理' に関する彼の姿勢が始めと終わりで変ったとした裏にはこのような事情による．しかしこの見方で困るのは，これだと全ての順序数に関する Burali-Forti の逆理にブレーキをどう掛けるかの問題が残るであろう．［実は，これは von Neumann の順序数論の原形である．彼は 'set (「集合」)' と 'proper class (「群衆」?)' を区別して逆理を避けている．ただ面白いことに Cantor も後に同様の区別は立てている(cf. **(4-2)**)．

Cantor の超限数論にはこのような表現の曖昧さの他にも，Zermelo が挿記し
$\aleph_n$ た理論的不備［「これでは % は得られても % は得られない」］もある(cf.「論 $\aleph_\omega$
集」p.199)．Zermelo の注意の発端は Fraenkel の指摘(1917)だが，もしこれが Cantor に与えられていたら，彼は彼なりに第三原理を修整したかもしれない．（例えば，「［任意の数 $\overset{\alpha}{\cancel{a}}$ に］先行する超限基数(濃度)が，それらのどの濃度で定義された超限順序数の列をなす限り，三つの生成原理によって新しい数の生成をどこまでも推進することを要求する」などはいかがであろうか？）ただ何れにしても，日常言語という曖昧さを含んだ表現法には，揚げ足も取れる代わりに 'ああ言うとこう言う' ことのできる融通無碍のところがあり，これが Cantor の超限論の長所にも短所にも繋がっているように思われる．

それにしても，Cantor の議論は所詮，一種の循環論法ないし論点先取だから，今度はこれについて考えたい．

(3-2-2) Cantor の集合論の論点先取的性格 (§§4-7)

§4 では「数学において有限整数以外の対象は真に存在するものでない」というアリストテレスの意見（「形而上学」XI-10）への反論の形で，旧師であり彼に対する最大の批判者になっていたクロネッカーの有限主義が批判される．具体的構成に拘る有限主義は対象の地平に止まるのみで大きな見通しを欠くとい

うのがその主旨だが，特に無限整数の導入に関しては「アリストテレスの議論は数は有限だから無限ではありない」という論点先取だとして反論する．

しかしその反面，今も見たとおり，カントルの超限数も「数には無限がありうるが故に超限数はある」との論点先取に支えられていると言える．そしてこの二つの「論点先取」のどちらを採るかは，「信念」の問題として片付けるのでなければ，結局それぞれの立場からの成果如何にかかってこよう．

例えば彼は連続体濃度を'基数'として利用するが，それを支える事実は'連続体は可算集合ではない'という否定的結果だけで，'だがそれをしも数える数はある'と考えたところに初めて基数概念が成立し利用の道も開けたのである．

私は **Cantor の集合論の本質がこの種の論点先取にある**と見る．それは無限の逆説 ー 早い話が Burali-Fortiの逆理 ー すれすれの議論 だが，それを回避しつつ一定の成果を収めたところにその意義がある．

但しこれは論点先取を悪いと決めつける主張ではない．事実，公理的集合論で「無限集合の存在」を要請するのは，いわば開き直ってそれを前提したことに他ならない．この事情は，無限者たる神の存在に関する限り哲学や神学でも同様で，中世以来 Descartes, Spinoza を経て延々と続く西欧の碩学たちが与えた「神の存在証明」にしても，彼らの超越的な神と無縁の文化的伝統に育った私などには，結局，論点先取の一種に見える．(個人的に言えば，私は「絶対的創造者たる神」という概念を，人間の最大の「創造物」と考えている!)

尤もカントルの発見的だが曖昧な論点先取的理論は，公理的集合論において精密な議論に変換されると共に，その変幻自在な理論展開も神通力を失うことは前記の通りだが，これについても［1］を参看されたい．

論点先取に関する原註では，Platon, Aristoteles の無限観から Nicoraus Cusanus や Bruno にまで及ぶが，Cantor は「自分の創意は，実体的無限整数の上昇列の数学的探究のみでなく，それが自然界に現われることを初めて問題にした処にある」と言う．これは後の自然哲学("Uber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume Gn. Zweite Mitteilung」1885；「諸定理(II)」と略)を先駆する．

同じ場所で彼は Nicolaus Cusanus ばりに，

「この無際限列の途上では決して絶対者(das Absolut)に到達しえないが，... この絶対的な超限順序数の列は或る意味で絶対者のための適切なシンボルを与えるはず」

と言う．これは彼の神学的哲学の発端だが(cf.**(4-2)**)，また「超限順序数の全体」の自家撞着性(Burali-Forti の逆理)の意識が既に彼にあったことを示す．

彼はこの後，Aristoteles の片言隻語を捉えて，無限数の存在を我田引水的

に執拗に強調するが，これは或いは彼の不安定な精神状態の反映かもしれない.

§5 ではこの強調が近世以後の哲学と科学の伝統的考え方，特に Spinoza と Leibniz が批判される. Cantor は彼らの考え方を「数は有限のものだが，真の無限すなわち神の絶対性は限定（determinatio）を許さないもの」とまとめ，この後半は正しいが「数は有限」と決めてかかるのはこれも論点先取だと批判する. また関連的に，数の有限性の根拠に人間の悟性の有限性をもち込む考え方（Kantが念頭にある？）についても，その悟性能力を有限説の根拠は数を有限と決めた処にあると言う. この辺の議論もいささか我田引水的に見える.

§6 では同様の論法によって，実体的無限整数は普通の数の性質と違う性質もあるが(例えばωは偶数でも奇数でもあり，同時に偶数でも奇数でもないと見られる)，この故に「超限数は存在しえず」とするのは誤りで，概念の一般化は或る種の特殊性を捨てる処に起こると反論する. そして「同様のことは複素数についてもあった」と言う. 哲学的考察の方はともかく，この主張は妥当である.

§7 では Leibniz への批判に関連して，Bolzano の『無限の逆説』(1853)が取上げられる. 但しそこには濃度，超限順序数という二つの重要な概念が欠けていたとして，ここでも自説の独自性が強調される.

この節には中世の実在論者に関する長い註があり，中世以来の無限論に関して多くの文献をを引用して

> 「そこにある生成的な非本来的無限についての論には異存ないが，実無限についての論には賛成できない. ... これは近代の Kant や Hegel についても同様である」

とするが，この最後の点を含めて，この註の議論には良く分からぬことや疑問に思えることが多い.

(3-2-3) 「数学の自由性」の主張の背後の自然哲学（§8）

§8 には有名な標語「数学の本質は正にその自由性にある（Das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit)」が現れるが，この節の議論は純粋数学を論ずるだけでなく，それが応用可能であることの根拠に及び，"諸定理(II)" の自然哲学(1885)を予感させる. そしてここには内容，用語の両面から Spinozaの「Ethica」の影響がはっきり見られるのである.

彼は先ず数学的存在，この場合は特に超限数の実在性(Realitat)ついて，主観内実在性（intrasubjektive oder immanente Realitat）と，超主観的実在性(transsubjektive oder transiente Realitat）とを分かつ.

主観内的実在性とは「それらが定義によって悟性の中に確固として定まり，精神の実体(Substanz)に一定の仕方で様態的変状(modifizieren)を与える限りでの実在性」であり，超限数を第１級，第２級，... と分かつのはこの実在性

での問題だとする．この数学の本質は自由性にあり，これを制限するのは**無矛盾性**(widerspruchslos)のみだから，これには「自由数学(freie Mathematik)」の名がふさわしいとも言う．

他方，超主観的実在性とは「それらが外界の現象や関係の表現であり，例えば第1級，第2級，... の超限数が，物的自然（Natur)や精神的自然に現実に現れる濃度の表現である限りでの実在性」とされる．一般に主観内的に実在する概念は無数の関係で超主観的実在性とつながるが，それらの関係を確定するのは超主観的実在性の問題で諸学との関係を考慮せねばならず．この意味でそれは 'Metaphysik' に属すると言う．その成果を外界の事件や関係の表現に用いる応用数学（解析力学や数理物理学など）は超主観的実在性に絡むため，前者ほどの自由は認めらぬとする．してみると，彼は第1級，第2級，... の超限数なども力学や物理学に応用するつもりだったのかと言いたくなるが，「諸定理(II)」における自然哲学では正にその構想が描かれている．つまりそれは如何に幻想的に見えても，彼にとって単なる思いつきや脇道ではなかったのである．

以上は純粋数学と応用数学，むしろ観念論と経験論の間の機微を論じたものだが，彼はこの二つの実在性の繋がりの基礎は我々を含む万有の統一の中にあるとする．これは注目すべき意見で，概念の秩序と物の秩序の連結とを同一視した Spinoza の "Ethica" の '物心並行論' の思想の反映である．

Spinoza の影響はこれだけでなく，ここにある一連の言葉，実在性（Realitat)，実体(Substanz)，様態的変状(Modifikation)，自然(Natur) などは，Spinoza の realitas, substantia, modificatio, natura を何の説明もなく，元のニュアンスをほぼそのまま継承したものである．同様の例は §1 にもある．「実在的無限整数は，本来的無限の Form und Affektio（形相と属性）に属する」(p.166)というのも，(Form = forma = 形相,本質,実体）はよいとして，Affektio は Spinoza の場合，実体(あるいは神)からの触発によって生ずる種々の状態や性質を示す言葉で，スコラ哲学での用例は知らないが，おそらく彼独特のものである．

["Ethica" には '形相' に当たる forma はあるが，'質料' に直接当たる言葉はなく，本質の様態変化(modificatio)，その変状ないし触発(affectio) があるのみである．そして Cantor の上記の Affektion もまたそうした段階的ニュアンスだったのかもしれない．そういえば彼は §4 で，'超限数の無際限列によって絶対者(das Absolut)には到達し得ないが，この列は絶対者のための適切なシンボルを与える' と書いたことを述べたが，これなども，Spinoza の（神＝無限＝(能動的)自然(natura naturans)）の思想を集合論の知見によって解釈

ないし克服しようとしたものと解されるし，この思想はまた Cantor の自然哲学を底流する一契機だったと見られる.

この節に付けられた註には，この思想が Platon から Spinoza, Leibniz の線にあることを述べた後，経験論，感覚論，懐疑論と並べて Kant の批判哲学を "これでは数学や物理学の認識の普遍的確実性は得られない" と論難する. しかし Kant が問題にした普遍的確実性の根拠は，実無限，仮無限の問題よりも認識主体に関する批判だったから論点にずれがある. 私はむしろ Cantor の超限数の '形而上学' に対してこそ，賛否何れにせよ，Kant流の批判があってよいと考え，Cantor流の天下りな議論にはついて行けない.

ともかく彼は上記の標語によって，その念頭にあった '数学の本質' の中に超限数論をも支えうる人間精神の能力として超限的能力を強調し，人間の '自由な創造' の中には '超限数のような，あるいは複素数のような必然性' のあるものもあれば，そうでないものもあるけれども，前者における必然性は万有の統一性に支えられて応用可能だと信じていたのである.

(3-2-4) Cantor は数学的連続論を時間論，空間論の基礎とする (§9, §10)

§9 は実数の議論である. 彼は '連続 即 実数' とする速断を避け，とりあえず 1872年に導入した無理数(「拡張」)を '連続' の定義として取り上げ，§10 における時間，空間に関する意見の土台にする.

§10 は連続 (Kontinuum) に関する哲学である. 彼は古来の哲学の中から，

(1) 連続者が終わりなく分割可能な原子からなるとする Democritos 的原子論 (Aristoteles もこれに入れる),

(2) 有限の大きさの原子からなるとする Lucretius 的原子論,

(3) 連続者は，有限，無限を問わず，いかなる個数の部分からなるものでもないとする聖Thomas の議論

の三つを挙げる. そして「この長い論争に立入ることは避け，空間という枠に限定して数学的に連続の概念を確立したい」と断った上で，「数学者の連続の扱いは，n次元の実数や複素数などの '連続的量の集合' つまり n次元数空間における**関数の概念**に結びつけられてきたが，自分は**連続そのものずばり**を数学的集合論によって解明しようとするのだ」と言う.

連続を集合論的に元の集合とし，時間を瞬間(時点)の集合，空間を数学的点の集合とするのは現代の自然科学では常識だが，この常識に一つの数学的基礎を無理数の集合の形で与えながら，更にそれを哲学的に吟味したのは Cantor が最初であろう. 尤もよく見るとその哲学的議論には多くの問題がある.

元来，時間が何かという問いは人類にとって永遠の難問である. 試みに古来のこれに関する注目すべき言説を挙げると，古代では Platon の詩的な "時は

永劫の過ぎゆく影”，Aristoteles の理論的な ”時は一方向の矢だが，それを測るのは回帰現象” があり，5世紀では聖Augustinus の有名な章句 ”時間とは何か，人が問うまでは私にも分かっているが，問われた途端に分からなくなる” がある．13世紀の聖Thomas の ”連続の分割は意味無し” も時間論と無縁ではない．近世では Newton の ’時間は宇宙の普遍定数’ があり，Leibniz の原子論的な dx あるいは dt がある．近代でも Kant の先験的直観形式としての時間論と共に，聖Thomas の現代版のような Bergson の純粋持続の説も見逃せない．

空間概念の難しさも古くからあるが，時間概念と違って空間概念が数学や哲学の前面に出たのは近代かもしれない．Democritos の存在論（虚空と原子）は別格として，Aristoteles の空間は理論的学問の対象外の虚無（真空）であり，その考えは Galilei の頃まで続いていて，空間が学問の対象になるのは射影幾何学の現れた近代以降であるように見える．Kant の空間論が注目に値する一つの点はこの動きの中での意義で，実際，非ユークリッド幾何学の研究が顕著になるのは Kant の「純粋理性批判」の刺激だとする説もある（近藤洋逸「幾何学思想史」）．

この脈絡の中で Cantor の時間論，空間論を見ると「空間の枠に限定して数学的に連続の概念を確立する」という制約のせいにもせよ，むしろ単純で，初期の「時間，空間の実在性が絶対的か否かは決定できない」(**Dis-2**) からも余り進んでいない．また哲学的にもいくつかの問題がある．彼は言う．

> 「連続の概念は時間以上に根元的で，連続を考える時に時間概念や時間的直観を援用するのは本末顛倒である．時間はこれと独立な連続概念の助けを借りる表象であって客観的実体でもなく，［Kant流の］必然で先験的な直観形式などの主観的なものでもない．それは自然界に現れ知覚される運動の間の関係を確立するための補助概念ないし関係概念であって，客観的な時間，絶対的な時間などは自然のどこにも存在しない．従って時間は運動の量ではなく，むしろ運動を時間の量と見るべきである．... 連続を明らかにするのに，［Kant的な］空間の直観形式ではどうしようもない．何故なら空間も空間内で考えられる図形も，感性的(asthetisch；原義は美的だが，カントの用例による)考察，哲学的省察，あるいは精密でない比較は勿論，厳密な数学的研究でも，その対象になれるだけの内容を持ちうるのは，既に概念として用意されている連続を援用してのみできることだからである」(p.192)

しかしこのように言う一方，彼は世界の真実在が何かには触れていないため，数学的世界のみが現存する感じになり，その世界では時間，空間はそれぞれ時点，空間点の集合でもかまわないように見える．そして数学的世界と経験的現実界との関連に問題を残す．別に実在的整数(超限数)が数えるのはその世界だ

けの話になり，$8 の応用数学の議論が宙に浮く感じでさえある．これを救うには真実在が何かを示して欲しいが，カントルの議論には，後の「諸定理(II)」をも含めてこの点が欠けているように見える．超限数が整列集合の順序(型)というのみで，その元について触れないのも気になる．

加えて，以上の議論はカントの斥けた形而上学的な議論と見えるため，彼の Kant への反論には，形而上学を批判した Kant哲学への Cantor の誤解があるように思われる．私はここでも，現代の数学的連続概念を Kant 的批判によって吟味すること，即ちそれを「真理」ならしめるために理性はどんな条件を満たすべきかの角度から考察することが意味あることと考える．但し Kant が準拠した ユークリッド的純粋数学は単一だったのに対し，現代の集合論的連続は単一ではないから，問題を設定すること自身が難しく，勿論私にも成案はない．

なお，67年以来の時間•空間や Spinoza 等への彼の哲学的関心が数学的無限論一集合論一の，潜勢的にもせよ原動力だったとは考えられない．むしろ集合論を得て昔の関心が甦ったというのが真相であろう．尤も私はそれでも1983年秋のこの論文以後，この双方には互いにそれなりの影響があったと見ている．

$10 の後半は $9 の実数論の上に点状連続体の数論的概念として n次元の数空間［実は距離空間］を導入し，その空間，ひいては区間［0,1］の濃度($\aleph$)が $\aleph$
$\aleph_1$ 第2濃度($\aleph_1$)になるとの仮説に以後の問題を集約し，以後の彼の仕事は全てこの問題に繋がるが，そこには哲学的関心と数学との絡み合いが見られる．

その一方，連続 (Kontinuum；単数)の正確な定義は今まで与えられたことがないとして「点連続体」をどう定義するかを考え始める．完全集合は必要だが不十分であり，(弧状)連結集合(運動論)も考慮する要ありとして，完全かつ(弧状)連結であることをもって「点連続体」のとりあえずの定義とする．しかもそこにはなお若干の迷いがあり，彼は例えば開区間や円の内部なども複数形の半連続体(Semikontinua)と呼んで，一つの点連続体と見られると言い，そのことを第6部 $19 でも取り上げている．

第5部の $$11-13 については既に述べた．**§14**では超限順序数の素因数分解などの数論的定義がある．

(3-3)「無限線状」第6部 ($$15-19)

第6部 (1884) は $$15-19 の4節からなる．今度は哲学的傾向は乏しいが，完全集合の濃度を決定して，集合の範囲を無限線状閉集合に限れば連続体問題が解けることを示す($19)．当然，彼はこれで終えるつもりはなく，「論集」にはないが雑誌論文の末尾には 'Vortsetzung folgt' とあり全面的解決が予告されるが，勿論，続編は書かれていない．

(3-3-1) 閉集合の範囲では連続体仮説が成り立つ

$15 には n次元空間の点集合 P に関する一般的予備定理 I,II,III がある．これは彼が 'Metamathematik' と呼ぶ一般的定理で，例えば P が性質 G をもつとは，空間の有限分割に際してその少なくとも一つに入る P の部分が G を持ち，P の任意の拡大にも G が遺伝するというような定義を与え，P の局所化や拡大に対処しようとするもので，次節を初め，「諸定理(II)」でも使われる．

$16 で n次元空間での集合 P の濃度に関し，**(3-1-4)** の式(*)を超限的に拡張した式

(**)　$P(1) = \mathfrak{S} (P^{(\nu)} - P^{(\nu+1)}) + P^{(w)}$,　[( )内は全て可算]

を用いて，可算集合や完全集合に関する従来の知見をまとめる(定理 A-G).　< → ⊂

$17 では更に吟味を進めるため，閉集合(P'⊂P)，自己超密集合(P⊂P')などの術語が導入され，定理 A-G を閉集合について検証している．

$18 は以上の知見を引っ提げての測度理論の検討である．

$19 はこの一連の論文の最高到達点で，先ず完全集合の濃度を決定し，非可算の閉集合の分解式 (**) の最終項が完全集合になることによって '集合' の範囲を無限線状閉集合のみに限定した形で連続体問題を解くのである．

上記のように彼は，完全集合のそれ自身の限界内で閉じている点では完全の名にふさわしいが，$10 の議論によると開集合も全て有限個の完全集合と高々可算の集合との和や差によって表されるから，これで連続が本当に定義されたかどうかについて迷っていた．ただ完全集合はその多様性にも拘わらず共通な性質として線状連続体(閉区間 [0,1])の濃度を持つことが示されたので，ともかくも以上の結果を得たわけである．

(3-3-2) 連続体問題のその後から

その後のことについて一言すると，彼はこの閉集合 (P'⊂P) の分解での成功を踏まえて，一般の P にも類似の方法で立ち向かおうとする．問題は(閉集合たる)導集合 P' と P との差 P-P' と P'-P の様相だけである．そこで彼は自己稠密集合 (P⊂P') を用いて上の (**) に似た分解を試み，それには成功するが(「諸定理(II)」，cf.**(4-1)**)，最終目的には達しない．

閉集合に関するこの結果は，Hausdorff の非常な工夫によって 'Borel集合の範囲でも連続体仮説は成立する' ことまで拡張され(19**)，更に Borel集合が解析集合に拡張されると共に極めて簡明な形になる．しかし解析集合の自然な拡張たる射影集合になると最早同様の結果は得られず，今日では判定不能(!?)な難問として数学基礎論の問題になっている．

一方，Cantor の悪戦苦闘の痕は "Acta Mathematica" に残っている．「諸定

理(II)」や同誌の創刊者 Mittag-Lefler 宛ての書簡などがそれである．しかしその彼でさえ友人宛の手紙の中で，「Canror の数学は良いが，あの哲学は頂けない」と書いているくらいで，これが当時の数学界の大勢だったのである．Cantor の旧師でただ一人彼に同情的だった Weierstrass も同じような意見であった．この点から言うと，第５部の哲学的要素がしばしば無視されるのも故なきにあらずだが，私は Spinoza を踏まえた Cantor の創造の底を叩き，その想念の分析を促すがあってよいと思っているのである．

(4) その後の Cantor の哲学的論文

Cantor はその後，最後の論文 "Beitrage zur Begrundungder transfiniten Mengenlehre" (1895/1897; 功力，村田訳，共立出版)との間に二編の哲学論文と，"Mitteilugen zur Lehre vom Transfiniten (超限理論の諸報告)" (1887/1888) を発表している．検討未了の最後のものを除いて解説する．

(4-1) 「諸定理(II)」(1885); 彼の自然哲学の構想

この論文では「無限線状」の後の二つの論文での結果を踏まえて数学的結果を展開した後，Spinoza-Leibniz の線上での自然哲学の構想が展開される．

$1 は「無限線状 Nr.6」の $17 で導入された分離集合（そのどの部分にも自己稠密部分(P < P')をもたない集合）についての結果も加えて，同じく $17 での閉集合に関する結果が精密にされる． (<) → ⊂

$2 ではその結果が一般の点集合についても成り立つか否かを自己稠密集合を用いて吟味する．連続体問題の最も微妙な点は P とその導集合 P' との食い違う部分の様相にあるが，閉集合の分解 (**) では自己稠密集合(P < P')すら処理できない．P'-P の濃度は連続体濃度より小さいというだけだからである．

この後の件は余り知られていないので，多少厄介な数学的内容に立ち入ることになるが，その躓きの大筋を示そう．

先ず自己超密集合 P に「均質集合」を導入する．これはどの近傍内の P の点の濃度も同一な集合で，有理数全体は可算均質集合，連続体は連続体濃度の均質集合である．

次に一般の集合 P について，孤立点の全体 Pa を '付加部分(Adherenz)'，P の点で P の極限点でもある Pc (= P∩P') を '凝集部分(Koharenz)' と呼ぶと，P は Pa と Pc に分解される： (*) ∩

(1) $$P = Pa + Pc.$$

この Pa は孤立集合か空集合だが，Pc には付加部分 Pca と凝集部分 Pcc (= Pc^2) とがある．そこで P は v を或る第２級順序数として，γ (**)のように

(2) $$P = Pa + Pca + Pc^2a + .. + Pc^{\omega}a + .. + Pc^{\gamma}a + .. + Pc^{\gamma},$$

と分解される．v'次の凝集部分 $Pc^{y'}{}_{a}$ は「超限帰納法」(この名の出現!)で定義するのである．更にこの分解を第３級順序数の数 W まで形式的に延長して，第２級順序数の末端部における様相を調べる．

$\boxed{W} \to \Omega$
$y, y \to \nu, \nu'$

(3) $$P = \sum_{y=0,1,\dots<\boxed{W}} Pc^{y}a + Pc^{\boxed{W}}.$$

例えば P を有理数全体や連続体とすれば，Pa = 0，Pc = P で，どの y に対しても $Pc^{y}a = 0$，$P = Pc^{(1)} = \dots = Pc^{y}$ (= $Pc^{\boxed{W}}$) である．もし分解式(2)において，各 $Pc^{y}a$ が可算，$\overset{\nu}{y}$ は高々第２級順序数，或る y に対して Pc^{y} 以下が連続体濃度をもつことになれば，閉集合の場合と同様，問題は解決する．しかし Pc^{y} は自己稠密な均質集合になるところまでは行くが，それ以上の濃度決定には到らない．

この間，§1 では「無限線状 Nr.6」の定理 D-G を再掲してそれを定理 H としてまとめるだけだが，§2 では今回の分解に関する類似の定理 J,K,L を証明する．参考までに定理の大要だけを引用しておく．

定理 J．P が(自己稠密部分のない)分離集合ならば，P は可算で，高々第２級の或る a から先は $Pc^{a} = 0$.

$a \to \alpha$

定理 K．P が分離集合でも可算であれば，同じく或る a に対して Pc^{a} (=U) 可算均質集合で，それ以前の和 (=R) は分離集合．

定理 L．P の濃度が非可算のとき，同じく或る a が存在して Pc^{a} は自己稠密集合となるが，これはまた二つの部分，非可算な自己稠密集合 V と可算濃度の均質集合 U とに分かれる．

こうして結局，自己稠密部分 V (= Pc^{a}) の濃度が不明のまま残るのである．

§3 において，この分解は第２，第３，... の高い濃度を念頭に置きつつ粘り強く継続されるが，閉集合のように分解の各要素が可算集合と連続体濃度の完全集合とに限定されるのと違って，均質部分集合の濃度が何処まで行っても決定できず，P の濃度決定には到らない．Cantor はさぞ歯がゆい思いをしただろうが，それにしてもその思索の粘り強さには感嘆の他ない．

われわれに大切なのは **§3** の後半で，そこではこの考察が一種の自然哲学の建設を目指すものだという意図が述べられる．この意図は学位論文のテーゼ以来のもので「無限線状」の Nr.3 以来しばしば示唆されてきたが，ここに来ると形而上学的幻想といった要素が強く現代的意義はほとんどないもになる．しかしそれは Cantor の数学的創造の一つの推進力だったようだし，このように非常識なまでの想念の飛躍は，独り数学と言わず，学問の将来のために意味あることであろうと思い，以下彼の「自然哲学」の輪郭を説明する．

彼の自然哲学は，当時の物理学にあったエネルギー論と原子論の対立の中に，

それらとは全く異質の点集合論をもって割って入ったという態のもので，あまり人から相手にされなかったのも無理はない．量子論の勃興は20世紀になってからで，当時は化学の方面で分子，原子が少しずつ認められ，熱力学や電磁気学を中心にエネルギー論が優勢だったが，熱輻射の問題やエーテルの問題がようやく人々の関心を捉えていた頃である．しかし Spinoza の汎神論的な哲学を顧みるとき，Cantor には彼なりの脈絡があったのである．

彼は先ず，自然現象の理論的研究が基礎においている仮説に不満を表明し，その不満の由来は，理論家が materia（Aristoteles的質料か，Spinoza的 affectio か）の窮極要素について全くはっきりしたことを言わなかったり，あるいは極小だが空間的容積の皆無ではないいわゆる原子を仮定したりしている現状にあると言う．そして ”もっと満足の行く自然解釈に達するには，materia の窮極本来の単純な要素を実無限数[実体的実数]におくべく，空間性に関しては拡がりを完全に欠いた真に点状のものとして見るべきで，このことは，私には全く疑問の余地なし” と言う．

これは Spinoza の 'Natura naturans（能産的)自然としての神' の考えの系統である．彼は，同様の意見を持つ物理学者として Farady, Ampere, Weber を，また数学者として特に Cauchy を挙げているが，その当否は私には分からない．

彼は更に，この基本的直観を実現に移すには，自分の創った一般的な点集合論の推進が必須だと主張する．

”私は，自然の単純な要素で materia 構成するものを，Leibniz との関連で 'monado' または '一者' と呼び，次の見方から出発する．即ち，種として異なるが互いに影響し合う二種の materia，ないしそれに応ずる二つのクラスの monado，即ち物体•materia とエーテル•materia，ないし物体•monado とエーテル•monado とが相並んで基礎におかれるべきであり，この二つの基盤は今日まで観察された感覚的現象を解釈するのに十分と思われる”
という見方で，これが上の集合の分解論に繋がるのである．

”私の信ずるところでは，これは今日の物理学とうまく調和する．...

” この見地において先ず問題になるのは，二種の materia を物体•monado あるいはエーテル•monado の集合と見るとき，それぞれはどんな濃度をもつかである．これについて私は，物体•materia の濃度は第１濃度，エーテル•materia の濃度は第２濃度，という仮説をずっと前から立てていた．...

”この見解には非常に多くの根拠があり，それは今後順次提示するつもりだが，さしあたりの仮定として，... ，各時刻において物体•materia は（世界空間全体 G_3 においてであれ，その限られた部分 H_3 においてであれ）第１濃度の点集合 P の形の下で考え，エーテル•materia は同じ空間において

それと並んで現れる第2濃度の点集合 Q の形で考えねばならない．そしてこれら二つの点集合 P と Q は或る程度まで時間の関数として観察されるべきであろう．”

ここには連続体仮説が前提されているが，ともかく $2 の結果からいうと可算集合 P，連続体濃度の Q は次のように分解される．

$$P = P_r + P_i^{(1)},$$

この Pr は分離集合で P の残余部分，Pi_1 は密着部分と呼んだ可算な均質集合で，P が可算だからそれ以上の密着部分はない．また Q の分解

$$Q = Q_r + Q_i^{(1)} + Q_i^{(2)},$$

においても，Q が第2濃度なので Q_{i3} 以上の内属部はない．そして最後に，

”この本質的に異なる五つの構成部分は物体•materiaとエーテル•materiaを各時刻において分離すると見られるが，おそらくこの五者には，そしてまた P_r と Q_r が

$$Pr = \sum_{(a')=0,1,\dots<(a)}{}' Pc^{(a')}a;$$

$$Qr = \sum_{(a')=0,1,\dots<(a)}{}' Qc^{(a')}a$$

(a),(a') → α, α'

と分解された部分それぞれに，materia の本質的に別個な現象様式や作用様式，例えば物質の（固体，液体，気体の）状態，化学的区別，光，熱，電気と磁気などが対応するものかどうか，これを決定するのが先決であろう．”

という．彼は

”この推測を，これにもっと十分な検証を与えるまでは決定的な形で述べないでおきたい”

として，この論文を結んだが，言うまでもなくそれが公表される機会はついに来なかった．

(4-2)「実無限に関する種々の立場」(1885)

これはスェーデンの科学史家 Enestrom に宛てて書かれたもの(1885/XI/4)で「哲学・哲学的批判雑誌 (Zeitschrift fur Philosophie und philosophische Kritik)」Bd.88 (1886)に発表されている．哲学や神学の文献が多く私の手には負えないので，適当に端折りながらその大筋を示す．

Enestrom は Cantor の「無限線状 Nr.5」第5部の哲学の部分を省いたフランス語訳を読み，それに関連して「Moigno(モワニョ)神父の ”実無限数の不可能性；信仰と科学の関係”(1884)を読まれたか」と訊ねた(1885/X/31)が，これはそれに対する答えである．Moigno(1804-1884)は数学，物理学に造詣があり，

その書は没年の出版で小冊子らしいが私は未見である.

Cantor に言わせると, Moigno の批判は, 実無限数の可能性を「数は有限なり」という信仰箇条によって斥ける論点先取であり, 信仰と学問との調和を求める点で原理的に反対はしないが方法は間違っているとして,「無限線状 Nr.5 $$4-8 を「仏訳でなく原文で読んでほしい」と言い, 新たに Cauchy の「一般物理学の七つの講義 (Sept lecons de physique generale)」や Gauss の名を挙げて「彼らの権威にも拘わらずその実無限批判は頂けない」と説く.

尤も Gauss 実無限反対は幾何学での無限遠点の実在性に関するもので, その反面, 整数論では（剰余類のような）無限集合を一個のものとして対象化することに先鞭を付けている. 現代数学の集合一元論的性格が Dedekind に発するとしても, その源は Gauss の整数論研究にあるとも言えるであろう.

Cantor 自身の例の「論点先取批判」のまとめとして, イタリック書きの部分を要約する.

"実無限数の可能性に反対するいわゆる証明はすべて, 問題にしている数に有限数のもつあらゆる性質を要求し, むしろそれらを押しつけようとするところに間違いの根本がある. 他方, 無限数の方は, これが一般に何らかの Form (形相/形)として思考可能である以上, 有限数との対比を通じて, 全く新しい数の種族を, 即ちその性質が物の本性と完全に独立だが, その研究対象は我々の恣意や偏見によるのでないような数の種族を構成せねばならない"

これによってそれを見れば, Cantor の側の論点先取の背後には, 無限数なるものは或る客観的な「数」として自ら新しい数の種族を構成せねばならぬという積極的な創造精神があったと言うべきであろう. 私が**(3-2-1)**で 'real' は「実体的」と訳す余地もあるとしたのは, このことを "Ethica" の「神＝実体＝無限＝能動的自然の変容」の哲学と結びつけてのことである.

さて Cantor はここでこの件について古来の思想家の意見を吟味する. 例えば Pascal は Arnauld'神父と共に 'Aristoteles的論難を矛盾とは言わぬまでも疑義あり' として実無限数の存在を認めている. それでも Cantor に言わせると, Pascal は実無限数の把握に関して, まだ人間精神の能力を低く評価していると言う. [なお Pascal の "Pensée" 232 には '数には無限がある (Il y a un infinité en nombre)" という章句がある. [1] 所収の論文「パスカル私記」参照.]

こうして彼は歴史上の思想家を, 実無限者 (das Aktual-Unendliche; A.U.と略) に対する姿勢によって三つに分類する. 即ち, A.U. を

1) 現世を超えた永遠にして万能なる神, または能動的自然 (in Deo extramundano aeterno omnipotenti sive in natura naturante) において問題にす

る．これを絶対[的実無限]者(das Absolute)と呼ぶ．

2）具体界または被造的自然（in concreto seu in natura naturata）において問題にする．これを超越的有限(Transfinitum)と呼ぶ．

3）抽象界(in abstracto)，即ち人間の認識によって実無限(akutual-unendlichen)の形において，Cantor流に言えば超限順序数の形において捉えられる限りで問題にする．

Cantor の属したキリスト教的世界において（1)の肯定は当然のことで問題にならない．(2)も（3)も否定する例としては Cauchy，Moigno の他，フランスの新カント派の哲学者 Renouvier を挙げ，(2)のみ肯定して(3)は否定する例としては Descartes，Spinoza，Leibniz などを挙げる．また(2)を肯定して(3)を否定する例も一部の新スコラ学派に見られるという．勿論，この分類のどこにおくべきかはっきりしない思想家も多数あり，そもそもこの分類にどれだけの意味があるのかも良く分からないが，彼が本当の気持ちは「(2)も(3)も肯定するのは少数で，おそらく自分が最初であろう」と言いたかったのである．

彼はこの後 Enestrom が「諸定理(II)」に関心を示したらしいことを捉えて，「拡がりを完全に欠いた真に点状のもの」を materia の窮極要素とするという彼独特の原子論に注釈を加え，また解析学の非本来的無限は関係概念ないし補助概念で上の分類の基準にはならないのに，それとこれが混同される場合があるとして「無限線状 Nr.5」での議論を補強した後，新たに実無限（aktuales Unendliches，つまり超限数)の中に，多化可能なもの(Vermehrbares)と多化不能(unvermehrbar)なものを分かち，前者は数学的に限定不能(undeterminibar)と考えねばならぬとする．そしてこれを混同した例として Spinoza の汎神論を挙げ，それを "Ethica" のアキレス腱と呼ぶ．真意は良く分からないが，それにしても17世紀の Spinozaにそこまで要求するのは無理というものであろう．なお，前にも触れたが，この '限定不能' は今日の proper class と言ってよい．

Cantor の哲学は決して体系的なものではなく，説得的なものとも言えないが，ともかくこの論文をもって彼は哲学者や神学者との果てしない論争に入って行く．その記録はこの論文に続く「超限理論報告(Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten) I-VIII」(1887-88）に残されている．

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

論文「無限線状」は，Zermelo が「Cantor の全業績の精髄であり，他の論文はその先駆ないしは補完」(「論集」，p.246）としたほどの労作だが，その哲学的部分は当時も今日もほとんど読まれていない．彼の仕事の中で数学者の間で現在最も評価の高いのは点集合論の創造で，一般集合論の方は一部の専門家以外にはさほど読まれず，自然哲学に到っては全く顧みられない．実は，私自身

もこの評価に特に異議はなく，率直に言えばその自然哲学は形而上学的幻想と思っている．しかしそれが常識的でなければないだけ，現代の常識に対するAntithese として頭のどこかにおいておきたい気がする上，その数学的創造の推進力の一つがこのような形而上学的構想にあったとも思われ，不毛に終わる試みもまた学問形成の実相の一面であると思われたので，敢えてこれを取り上げたのである．事実，これはどう見ても稀にしか見られない天才の仕事である．

その反面，私は，現在の集合論や基礎論を良く知らないので断定的なことは言えないが，現在の連続体問題の方向だけで「連続とは何か」が終るとは思えない．Cantor そこのけの夢のような話だが，私は，我々の連続の観念の底には意識の連続性のような人間存在の深淵に潜む契機があり，それを言葉，文字，記号，ないし数学や理論哲学のような非連続的限定作用によって解明するというのは所詮無理なことで，それは人間の永遠不断の追求に終るだけではないかと思っている．Cantor であれだれであれ，何かを確立できたと思ってもそれは霧の上に書かれた文字のようなもの，という絶望的思いさえ私は禁じ得ない．私は Kant や Bergson の哲学にも暗いけれども，それにしてもこれは私の本音中の本音である．事情が許せば何時の日にかこの本音の輪郭だけでも纏めてみたいと思うが，私にその力と時間が残されているかどうか，心許ない話である．

（1997年 7月）